Μαθημα 19ο

No. Date: 11/5/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Η εννοια της ισομετριας

Ορισμος

Ισομετρια καλειται ο γεωμετρικος μετασχηματισμος $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ο οποιος διατηρει τις αποστασεις, δηλ. $d(\vec{p}, \vec{q}) = d(\varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{q}))$ με $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n$ και $\varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{q}) \in \mathbb{R}^n$

Ισοδυναμα $\varphi: (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$

φ ισομετρια αν $d_1(x,y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y))$ με $x, y \in X_1$ και $\varphi(x), \varphi(y) \in X_2$

Παραδειγμα

1. $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x+1$, $\varphi(x) = x+1$

Εστω $x, y \in \mathbb{R}$

$\varphi(x) = x+1$, $\varphi(y) = y+1$

$\Rightarrow d(x,y) = |x-y|$

$d(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |(x+1)-(y+1)| = |x-y| = d(x,y)$

Ειδικη περιπτωση του 1

2. Ο γεωμετρικος μετασχηματισμος της μεταφορας (στο $\mathbb{R}^2$) Ειναι ισομετρια.

π.χ. $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\tau_{\vec{a}}$ κατα (a, b)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{η μεταφορα κατα} \\ \text{διανυσμα } (a,b) = \vec{a} \\ P(x,y) \longmapsto P'(x+a, y+b) \end{array} \right\}$

$P(x_1, y_1) \xmapsto{\tau_{\vec{a}}} P'(x_1+a, y_1+b)$

$Q(x_2, y_2) \xmapsto{\tau_{\vec{a}}} Q'(x_2+a, y_2+b)$

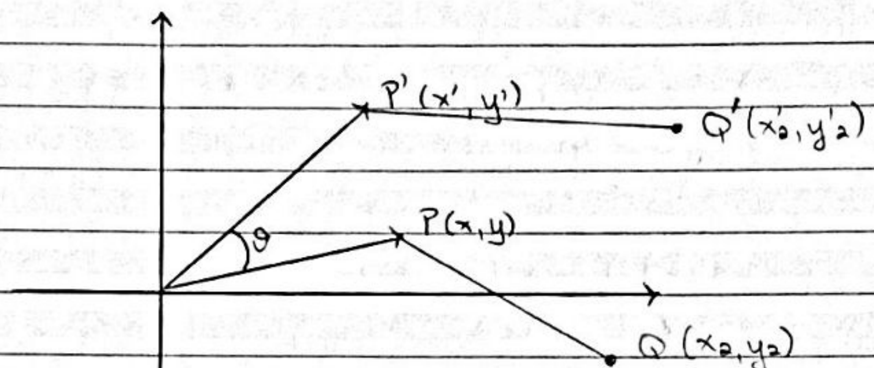
Αρα $d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$$d(P',Q') = \sqrt{\big((x_2+a)-(x_1+a)\big)^2 - \big((y_2+b)+(y_1+b)\big)^2} = \dots = d(P,Q)$$

$$\shortparallel$$

$$d(\tau_a(P), \tau_a(Q))$$

③ η στροφή $R_{O,\theta}$ είναι ισομετρία



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta \\ y' = x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta \end{cases}$$

Εστω $P(x,y)$, $Q(x_2,y_2)$ και εστω $P'(x_1',y_1')$, $Q'(x_2',y_2')$ οι εικονες αυτων μεσω της στροφης. Θ.δ.ο $d(P,Q) = d(P',Q')$

Αρα $d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

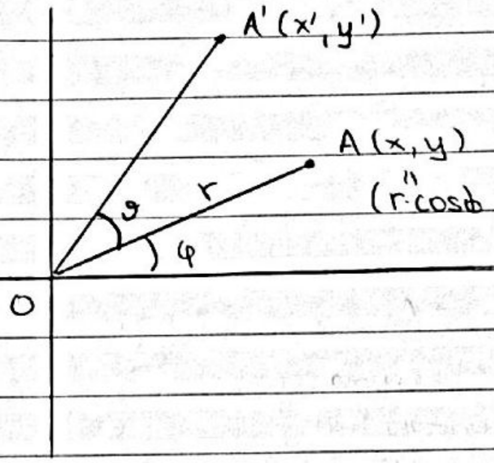
$$d(P',Q') = \sqrt{(x_2'-x_1')^2 + (y_2'-y_1')^2} = \dots$$

Οποτε

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cdot\cos\theta - y_1\cdot\sin\theta \\ y_1' = x_1\cdot\sin\theta + y_1\cdot\cos\theta \end{cases}$$ για το $P'(x_1',y_1')$

$$\begin{cases} x_2' = x_2\cdot\cos\theta - y_2\cdot\sin\theta \\ y_2' = x_2\cdot\sin\theta + y_2\cdot\cos\theta \end{cases}$$ για το $Q'(x_2',y_2')$

Παρατηρούμε ότι $(r \cdot \cos(\varphi+\vartheta), r \cdot \sin(\varphi+\vartheta))$



$(r \cdot \cos\varphi, r \sin\varphi)$

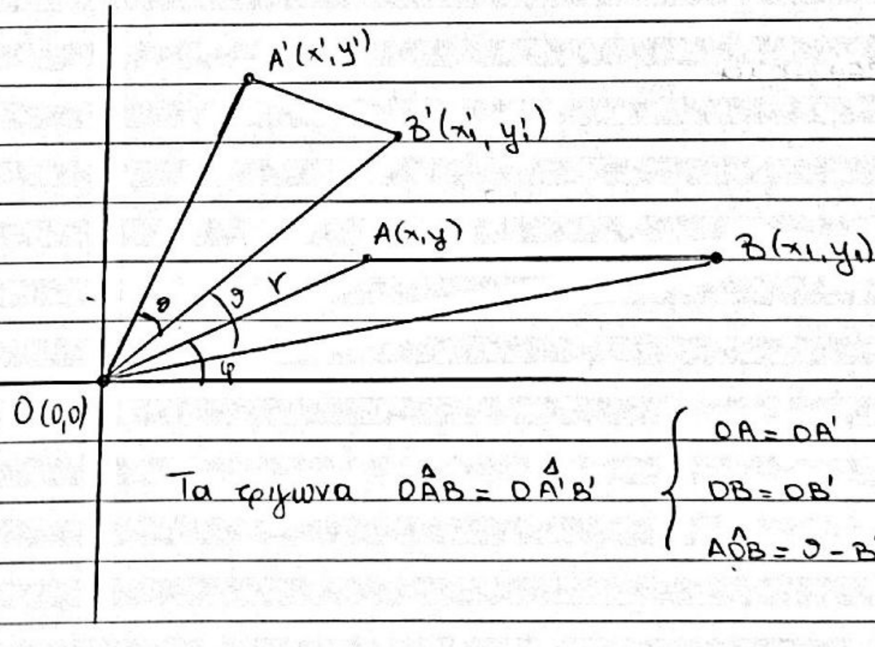
↳ δεν μπορώ να το βάλω γιατί δεν το ξέρω, πρέπει να το δείξω πρώτα.

λόγω της στροφής

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cdot\cos(\varphi+\vartheta) \\ r\cdot\sin(\varphi+\vartheta) \end{bmatrix}$$

$$|\vec{OA'}| = \sqrt{(r\cdot\cos(\varphi+\vartheta)-0)^2 + (r\cdot\sin(\varphi+\vartheta)-0)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2(\cos^2(\varphi+\vartheta)+\sin^2(\varphi+\vartheta))} = \sqrt{r^2} = r = |\vec{OA}|$$



Τα τρίγωνα $O\hat{A}B = O\hat{A'}B'$ $\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ A\hat{O}B = \vartheta - B\hat{O}A = A'\hat{O}B' \end{cases}$

$\Downarrow$

$AB = A'B'$

No. ① Date

Ορισμος

Μια ισομετρια $\varphi: V \to W$ ειναι επιπλεον γραμμικη, θα λεγεται γραμμικη ισομετρια (ή ορθογωνιος μετασχηματισμος)

Θυμαμαι
Για να ειναι γραμ. απεικονιση πρεπει να ισχυει: (i) $\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$
(ii) $\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$
$\lambda \in \mathbb{R}$

Θεωρημα (Ταξινομηση ισομετριων)

Εστω $(V, \langle , \rangle)$, $(W, \langle , \rangle)$ δυο πραγματικοι χωροι. Τοτε

① Καθε ισομετρια $\varphi: V \to W$ γραφεται κατα μοναδικο τροπο ως αθροισμα ενος ορθογωνιου γεωμ. μετασχ. και μιας σταθερας ($\varphi = \underbrace{g}_{\text{ορθογ.}} + \vec{a}$)

② Αν μια ισομετρια $\varphi: V \to W$ διαφερει απο μια γραμμικη απεικονιση g, μια σταθερα $\vec{a}$ $\Rightarrow$ η g ειναι ορθογ. γεωμ. μετασχ

Θεωρημα

Εστω V, W πραγματικοι χωροι (εφοδ. με $\langle , \rangle$) και εστω $\varphi: V \to W$ ισομετρια. Τοτε τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:

α) η φ ορθογωνιος μετασχ

β) $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

γ) $\|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|, \ \forall \vec{u} \in V$

δ) $\langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

Αποδειξη

α) Εστω $\varphi: V \to W$ ισομετρια

Θεωρω την απεικονιση $g = \varphi - \underset{\vec{a}}{\underset{\shortparallel}{\varphi(\vec{0})}}$ $\left(g(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) - \vec{a}\right)$

θδο g ορθογ. μεταςχ

Προφανως $g(\vec{0}) = \vec{0}$

$\left(\|g(\vec{v})\| = \|\varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{0})\| \xlongequal{\varphi \text{ ισομ.}} \|\vec{v} - \vec{0}\| = \|\vec{v}\|\right)$

• g ισομετρια

$\|g(\vec{u}) - g(\vec{v})\| = \|(\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{0})) - (\varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{0}))\| = \|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\| =$

$\xlongequal{\varphi \text{ ισομ}} \|\vec{u} - \vec{v}\| \Rightarrow g$ ισομετρια $\Rightarrow g$ ορθογ. μεταςχ. $\left\{\begin{matrix}\vec{a} = \varphi(\vec{0}) \\ \text{σταθ}\end{matrix}\right\}$

δ) g ισομορφισμος

$\|g(u) - g(v)\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Rightarrow \|g(\vec{u}) - g(\vec{v})\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \Rightarrow$

$\|g(\vec{u})\|^2 + \|g(\vec{v})\|^2 - 2\langle g(\vec{u}), g(\vec{v})\rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$

$\Rightarrow \langle g(\vec{u}), g(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$

μοναδικοτητα $\to$ ισομ. $\to$ ορθογωνιος

Εστω $\varphi(\vec{v}) = h(\vec{v}) + \vec{b}$

Παρατηρουμε οτι $\vec{a} = \varphi(\vec{0}) = \varphi(\vec{0}) - \vec{0} \xlongequal[h(\vec{0}) = \vec{0}]{h \text{ ορθ}} \varphi(\vec{0}) - h(\vec{0}) = \vec{b}$

Κι αρα $h(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) - \vec{b} = \varphi(\vec{v}) - \vec{a} = g(\vec{v}) \Rightarrow h = g$

β) Εστω η ισομ $\varphi: V \to W$ με $\varphi = g + \vec{a}$, $g: V \to W$ γραμμικη

Αρκει νδο g ισομετρια

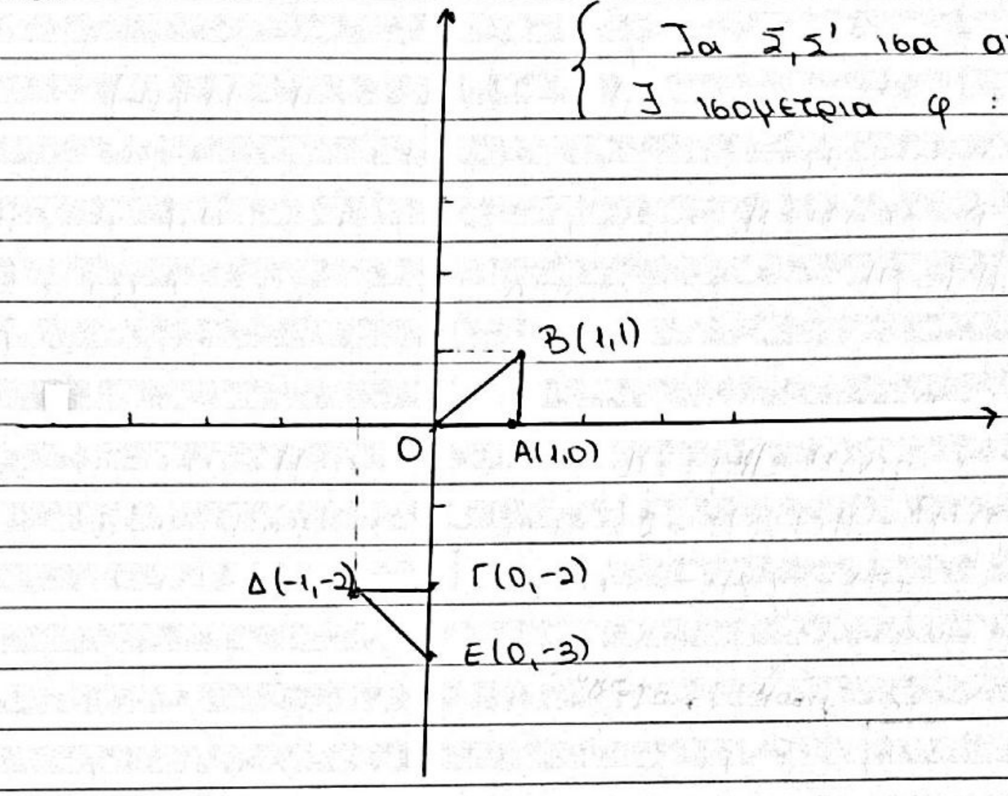
Εστω $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \|g(\vec{u}) - g(\vec{v})\| = \|(\varphi(\vec{u}) - \vec{a}) - (\varphi(\vec{v}) - \vec{a})\| =$

$= \|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\| \xlongequal{\varphi \text{ ισομ.}} \|\vec{u} - \vec{v}\| \Rightarrow g$ ορθογ.

No. Date

Εφαρμογη

Δινονται τα τριγωνα $\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ και $\{(-1,-2),(0,-2),(0,-3)\}$. Να δειξτε οτι τα τριγωνα ειναι ισα.



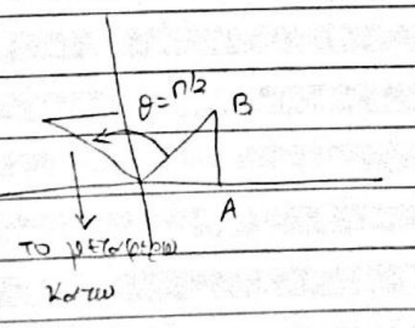
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Τα } \Sigma, \Sigma' \text{ ισα αν-ν} \\ \exists \text{ ισομετρια } \varphi : \varphi(\Sigma) = \Sigma' \end{array} \right\}$

Απο το προηγουμενο θεωρημα αρκει να προσδιορισω ισομετρια $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi = \underbrace{g}_{\text{ορθ}} + \underbrace{\vec{a}}_{\text{μεταφ}}$

(στροφή ή ανακλαση)

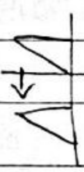
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cdot\cos(\pi/2) - y\sin(\pi/2) \\ x\cdot\sin(\pi/2) + y\cdot\cos(\pi/2) \end{bmatrix}$$



http://www.tanenghong.com

Εκτελω μεταφορα

(0, −3)



$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y'-3 \end{bmatrix} \overset{x'}{\underset{y'}{=}} \begin{bmatrix} -y \\ x-3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = -y \\ y'' = x-3 \end{cases}$$

Οποτε $A(1,0) \xmapsto{\varphi} (0,-2)\ \Gamma$

$B(1,1) \xmapsto{\varphi} (-1,-2)\ \Delta$

$O(0,0) \xmapsto{\varphi} (0,-3)\ E$

Αρα $\varphi : O\hat{A}B \rightarrow \Gamma\hat{\Delta}E$

$g'' + \vec{a} \Rightarrow \varphi$ ισομετρια

ορθ στροφη π/2 σταθ